

在網路外部性，產品相容性，與研發學習效果下之研發合資

李堯賢*

目 次

| | |
|---------------|---------------------|
| 壹、前言 | 肆、閉路(完全次賽局)Nash 均衡解 |
| 貳、理論模型 | 伍、結論 |
| 參、開路 Nash 均衡解 | |

摘 要

本文分析網路外部性，產品相容性，與研發學習之效果如何影響以降低成本為目的的廠商研發合資行為。利用微分賽局模型，本文推導開路與閉路(完全次賽局)Nash 均衡解。主要的發現如下：(1) 網路外部性，產品相容性，與研發學習之效果會增加廠商的研發支出，研發知識累積，與產出，以及降低產出價格，(2) 而研發知識累積之折舊率，研發調整成本，與貼現率則會有相反的效果。本文亦證明在某些情況下，廠商的研發合資行為是不會產生反競爭的風險。就此而論，本文的模型支持某些高科技廠商之間所從事的研發合資行為，應該是可以許可的。

關鍵字：網路外部性，產品相容性，研發學習效果，研發合資，微分賽局

*作者感謝評審者所提出的寶貴建議以及成功大學應用數學研究所許瑞麟教授與所內諸位教授的批評與指正。雖然如此，本文的剩餘錯誤仍由作者負責。作者現為中華工學院財務管理學系副教授。

壹、前言

在面臨日益激烈的市場競爭下，廠商之間利用策略聯盟 (Strategic Alliances, SAs) 所形成的合資 (Joint Ventures) 關係，以取得或確保市場的競爭優勢，已經是一種不可避免的趨勢。在廠商藉策略聯盟所創造的共同研究優勢 (Collaborative Advantage) 中，常見的策略聯盟方式有：廠商之間的合作研發 (Cooperative R&D, CR&D) 與研發合資 (Research and Development Joint Ventures, R&DJVs)。然而，在有關合作研發與研發合資的現有文獻中，皆以分析合作研發或研發合資，是否會妨礙市場競爭與降低社會福利水準者居多。亦即，廠商之間所形成的特定策略聯盟方式，是否會在國內的產品市場裡產生反競爭的風險 (Anticompetitive Risks)。（詳見 D'Aspremont and Jacquemin(1988) , Kamien , Muller and Zang(1992) , Kamien and Zang(1993) , and Suzumura(1992)）。其他相關的文獻，則在不同的市場結構下，探討引起合作研發的私人及社會誘因，以及政府稅率對合作研發與社會福利的影響效果。（詳見 Choi(1993) , Besley and Suzumura(1992)）。

而自從 Katz 與 Shapiro(1985) 以及 Farrell 與 Saloner(1985) 提出許多產品具有正消費外部性 (Positive Consumption Externalities) 的觀念後，吾人皆知，就某些重要的科技事業製造業而言，例如：通訊，資訊，消費性電子，半導體，高級材料與精密器械等產業，廠商所生產的產品（零件）皆具有網路外部性 (Network Externalities) 與相容性 (Compatibility) 的特性（註 1）。在這方面的文獻，

註 1：所謂網路外部性是指，就個別消費者的立場而言，其消費特定財貨所獲得的滿足感，將隨著消費該財貨或與該財貨相容之產品的人數增加而增加。以使用電話的效用為例，消費者使用特定品牌的電話所產生之效用，是隨著使用同一品牌或與該品牌相容之其他品牌的人數增加而提高。因為該消費者可在同一電話網路上與其他消費者互相交換訊息。至於產品相容性的意義，則是指兩種產品具有可交換使用的特性。例如：不同品牌的汽車零件可用在同一型汽車上。

Economides(1989) , Matutes 與 Regibeau(1988) , Tirole(1988) , 以及產業經濟學期刊 (March , 1992) 皆曾分析與討論網路外部性與產品相容性所衍生的相關經濟問題。但是，截至目前為止，關於網路外部性與產品相容性是否會影響廠商之間的合作研發或研發合資策略行為，則尚未引起學者及專家的注意。這對研究廠商之間所形成的合作研發或研發合資策略行為而言，未免不是個缺憾。

因此，本文的主要目的，即在嘗試利用微分賽局 (Differential Game) 法，考慮網路外部性，產品相容性，研發學習效果與研發調整成本 (R&D Adjustment Costs) 後，分析廠商之間如何決定他們研發合資努力 (支出)，產出，及產出價格。本文的結果也將和靜態競爭與靜態合作 Cournot 競爭下的結果，相互比較，以凸顯廠商之間所從事的研發合資水準，在不同的市場結構下究竟有何差異。這將有助於評估該聯合行為的經濟效益。再者，利用可能的差異，本文亦將說明公平交易法第十四條，應該在何種條件下，容許高科技廠商從事研發合資的聯合行為。同時，本文也將從比較靜態的分析結果，闡述一些有趣的經濟政策涵意。

本文的架構如下：第二節為理論模型，第三節為推導開路 Nash 均衡解，並解釋在該均衡解下，比較靜態之經濟意義。同時，利用和靜態模型之比較結果，推論廠商研發合資之例外許可條件。第四節為推導閉路 (完全次賽局) Nash 均衡解，並與開路 Nash 均衡解比較。從而引申在不同訊息結構下，兩者之異同對廠商研發合資行為之影響。第五節為結論。

貳、理論模型

首先，為節省符號起見，在本文中的各個變數皆省略時間引數， t 。而在變數上的 "." 代表變數的時間導數。我們假設在某產業裡，只有兩家廠商（廠商 1 及廠商 2），各自生產兩種產品， q^a 與 q^b 。因此， $q_1^a(q_2^a)$ 及 $q_1^b(q_2^b)$ 代表廠商 1(2) 在各別市場中的需求量。就 q^a 的需求情況而言，在該市場中，廠商 1 及廠商 2 所面臨的反需求函數為

$$P_1^a = \alpha - \beta q_1^a - \gamma q_2^a + Aq_1^b + Rq_2^b, \quad (1)$$

$$P_2^a = \alpha - \beta q_2^a - \gamma q_1^a + Aq_2^b + Rq_1^b, \quad (2)$$

式中， P_1^a 與 P_2^a 分別表示廠商 1 與廠商 2 之產品在市場中的需求價格（亦即，消費者願意付的價格）。 $\alpha > 0$ 為需求截距代表產品的市場大小， $\beta > 0$ 為自我價格效果表示消費者的邊際效用隨著 q_1^a 消費量的增加而減少。 $\gamma > 0 (< 0)$ 為交叉價格效果，表示 q_1^a 與 q_2^a 互為替代（互補）財。根據 Kesteloot(1992)， A 為廠商內的需求範疇效果 (Intrafirm Demand Scope Effect)。 $A > 0$ 表示消費者消費 q_1^a 的邊際效用，隨著 q_1^b 銷售量的增加而增加。因此， q_1^a 的需求也隨之增加。這顯示 q_1^a 與 q_1^b 具有消費上的互補關係。於是，按 Tirole(1988) 的說法， $A > 0$ 實際上是代表廠商 1 所生產的產品，具有屬於該廠商特有的正網路外部性效果 (Positive Network Externalities Effect)。反之，若 $A < 0$ ，則表示廠商所生產之產品，具有負的網路外部性效果。其次，又根據 Kesteloot(1992)， R 為廠商間的範疇效果 (Interfirm Scope Effect)。 $R > 0$ 表示消費者消費 q_1^a 的邊際效用，隨著 q_2^b 消費量的增加而增加。因此， q_1^a 的需求也隨之增加，這說明 q_1^a 與 q_2^b 具有消費上的互補關係。換言之， q_1^a 與 q_2^b 具有產品相容性 (Product Compatibility) 的特性。而因為這種不同產品間的相容性，也產生了產業內 (Intraindustry) 的正網路外部性效果。反之，若 $R < 0$ ，則表示廠商間的產品，不具相容性。也就是產業內存在著負的網路外部性效果。如同 (1) 與 (2) 的設定，就 q^b 的需求情況而言，廠商 1 與廠商 2 所面臨的反需求函數為

$$P_1^b = \alpha - \beta q_1^b - \alpha q_2^b + Aq_1^a + Rq_2^a, \quad (3)$$

$$P_2^b = \alpha - \beta q_2^b - \alpha q_1^b + Aq_2^a + Rq_1^a. \quad (4)$$

如同 Kesteloot(1992)，我們假設 $\beta > |A|$ ， $\gamma > |R|$ ，以及 $|A| \geq |R|$ 。亦即，傳統的自身與交叉價格效果皆分別大於廠商內與廠商間的範疇效果。同時，廠商內之效果大於廠商間之效果。此外，有關 A 與 R 的另一種經濟解釋，讀者可參考 Bulow, Geanakoplos, 與 Klemperer(1985) 的文獻。但是，在他們的模型中，並非探討市場之間的需求相互關連性。

廠商 1 與廠商 2 在未從事研發合資的策略活動之前，其成本函數為

$$C_i(q_i^a, q_i^b) = C_a q_i^a + C_b q_i^b, \quad i=1, 2, \quad (5)$$

式中， C_a 與 C_b 分別代表廠商生產 q^a 與 q^b 的邊際成本。在本文中，我們假設 $2\alpha > C_a + C_b$ 。根據 Kamien, Muller, 與 Zang(1992, Model 3)，廠商之間在同意形成研發合資的策略聯盟後，兩廠商聯合他們的研發活動，並共同分享研發成果。其研發努力之成本函數為

$$F_i(E_i) = E_i + \frac{cE_i^2}{2}, i=1,2. \quad (6)$$

式中， E_i 為廠商 i 的研發支出。由於在本文中，我們假設廠商在變動其研發支出水準時，會產生調整成本。(6) 式的第二項就是調整研發努力支出，對研發成本的影響。 $c > 0$ 是調整成本係數。而廠商共同從事研發合資所產生的研發知識累積，則以下列的微分方式表示：

$$\dot{Z} = E_1 + E_2 - \mu Z, Z(0) = Z_0. \quad (7)$$

式中， Z 為廠商的共同研發知識累積（經驗累積）， μ 為研發知識累積之折舊率。

根據 Spence(1984)，假設廠商利用研發合資所產生的共同研發知識累積，以降低其單位成本， C_a 與 C_b 。因此，其可實現的單位成本是

$$g_i^j = C_j - \nu Z, i=1, 2; j=a, b. \quad (8)$$

式中， $g_i^j > 0$ 是廠商 i 在研發合資下，生產 j 產品的可實現單位成本。 $\nu \in (1, \bar{\nu}]$ 是廠商的研發知識累積能轉換為降低單位成本的技術效率參數，也就是研發知識累積的邊際生產力。一般而言， ν 值的大小可以表示廠商研發合資知識累積的學習效果。

根據以上的設定，廠商 i 選擇其產出及研發合資支出，在有限的合資期限裡，極大其利潤的貼現值，亦即

$$\begin{aligned} \max \Pi_i \\ q_i^a \geq 0, q_i^b \geq 0, E_i \geq 0 = \int_0^T [P_i^{aa} q_i^a + P_i^{bb} q_i^b - g_i^{aa} q_i^a - g_i^{bb} q_i^b \\ - F_i(E_i)] e^{-\delta t} dt, i=1,2. \end{aligned} \quad (9)$$

受限於

$$\dot{Z} = E_1 + E_2 - \mu Z, Z(0) = Z_0.$$

式中， T 為研發合資之期限， δ 為貼現率。

根據 Friedman(1977)，(9) 式建立一個兩人非零和微分賽局，其中，每家廠商的產出及其研發合資支出為控制變數，而兩廠商的研發知識累積則為狀態變數。再者，有關於開路 (Open-Loop) 與閉路 (Closed-Loop)，亦稱完全次賽局 (Subgame-Perfect) 策略空間 (Strategy Space) 的定義，可詳見 Mehlmann (1988，第二章) 或 Basar 與 Olsder(1982，第六章)。而比較精簡的說明，讀者亦可參考 Dockner(1992) 的文獻。為節省篇幅，在此不再贅述。因此，由 (9) 式所形成的動態 Cournot 賽局中，假如廠商選擇開路策略，則稱在該策略下的均衡為開路 Nash 均衡。同理，假如廠商選擇閉路策略，則稱在該策略下的均衡為完全次賽局 Nash 均衡（註 2）。此外，為了顯示靜態賽局與動態賽局之異同。我們考慮兩種靜態賽局，亦即，靜態合作 Cournot 賽局與靜態競爭賽局，作為比較的基準。首先我們有以下的假設：

假設 1：在適當的參數設定下，本文中的所有均衡值皆可以為正的。

假設 2： $\theta \equiv 2\beta + \gamma + 2A + R > 0$ ， $\Omega \equiv 2\beta + \gamma - 2A - R > 0$ ，

$$\Delta \equiv (2\beta + \gamma)^2 - (2A+R)^2 > 0.$$

假設 2 是為了要滿足穩定條件而設定的。由於對稱的關係，我們將省略 (10)-(11) 式中，代表廠商的下標符號。

所謂靜態合作 Cournot 賽局是指，廠商分享研發合資成果，但在產品市場上

註 2：所謂開路均衡解是指，廠商在研發合資開始時，就根據其所獲得的可用訊息，決定其在未來研發合資期間內的最適策略。而這個策略是不會因為訊息環境的變動而改變的。換言之，在開路均衡策略下，廠商承諾在研發合資期間內將執行其在期初宣告的研發策略。在實際的廠商研發策略聯盟中，這種“一言既出，駟馬難追”的承諾，是有可能存在的。相反地，閉路均衡解則是指，廠商會因為訊息環境的變動而調整其研發策略。也因此，廠商的承諾期間是等於零。也就是說，廠商在研發合資期間，將可隨著另一廠商研發活動的改變，而改變其研發策略。同樣地，這在實際的廠商研發策略聯盟中也有可能存在。

相互競爭。其均衡的市場價格，產出，及研發合資支出如下：

$$P^{ac} = \alpha - (\beta + \gamma)q^{ac} + (A + R)q^{bc}, \quad (10-1)$$

$$P^{bc} = \alpha - (\beta + \gamma)q^{bc} + (A + R)q^{ac}, \quad (10-2)$$

$$q^{ac} = \frac{\theta(\mu + \delta) - C_a + C_b}{4\theta}, \quad (10-3)$$

$$q^{bc} = \frac{\theta(\mu + \delta) - C_b + C_a}{4}, \quad (10-4)$$

$$E^c = \frac{(\mu + \delta) - 2(2\alpha + C_a - C_b)}{8}. \quad (10-5)$$

而靜態競爭賽局是指，廠商各自從事研發之活動，不分享研發成果。同時在產品市場上是競爭的對手。其相關變數的均衡值如下：

$$P^{as} = \alpha - (\beta + \gamma)q^{as} + (A + R)q^{bs}, \quad (11-1)$$

$$P^{bs} = \alpha - (\beta + \gamma)q^{bs} + (A + R)q^{as}, \quad (11-2)$$

$$q^{as} = \frac{\theta(\mu + \delta) - C_a + C_b}{2}, \quad (11-3)$$

$$q^{bs} = \frac{\theta(\mu + \delta) - C_b + C_a}{2}, \quad (11-4)$$

$$E^c = \frac{(\mu + \delta) - 2(2\alpha - C_a - C_b)}{2}. \quad (11-5)$$

有關 (10)-(11) 式的證明，詳見附錄一。利用 (10)-(11) 式的結果，我們就能比較不同賽局之間的重要差異。值得一提的是，(10)-(11) 式顯示，在靜態的架構下，網路外部性與產品相容性會影響廠商的研發合資支出。換言之，產品市場之間的需求關聯性，或者按 Bulow, Geanakoplos 與 Klemperer(1985) 所說的，在多產品的寡占市場中，廠商之內的產品聯合經濟或不經濟與廠商之間的產品策略性替代或互補關係，是會影響廠商之間的研發合資支出水準。在 下節，我們先討論開路 Nash 均衡策略。

參、開路 Nash 均衡解

首先，我們利用(7)式與(9)式，導出開路 Nash 賽局均衡解。令廠商 的現值共狀態(Costate) 變數為 i ，則廠商 i 的現值漢彌爾頓定義式為

$$H_i = P_i^{aa} q_i^{aa} + P_i^{bb} q_i^{bb} - g_i^{aa} q_i^{aa} - g_i^{bb} q_i^{bb} - E_i - \frac{cE_i^2}{2} \\ + \lambda_i(E_i + E_j - \mu Z), \quad i,j=1,2,i \neq j. \quad (12)$$

根據(12)式，我們獲得以下的必要條件：

$$P_i^{aa} - \beta q_i^{aa} + A q_i^{bb} - C_a + Z = 0, \quad i=1, 2, \quad (13-1)$$

$$P_i^{bb} - \beta q_i^{bb} + A q_i^{aa} - C_b + Z = 0, \quad i=1, 2, \quad (13-2)$$

$$-1 - cE_i + 2\lambda_i = 0, \quad i=1, 2, \quad (13-3)$$

$$\lambda_i = -\nu(q_i^{aa} + q_i^{bb}) + (\mu + \delta)\lambda_i, \quad \lambda_i(T) = 0, \quad i=1, 2, \quad (13-4)$$

$$Z = E_1 + E_2 - \mu Z, \quad Z(0) = Z_0. \quad (13-5)$$

式中， λ_i 是廠商研發知識累積的邊際生產力（收益）。(13-1) 與 (13-2) 式說明，邊際收益等於淨邊際成本。(13-3) 式說明，研發知識累積的邊際收益必須等於其邊成本。而由(13-4)可知，廠商之間的開路均衡策略是對稱的（詳見附錄二）。亦即， $E_1 = E_2$ ， $q_1^{aa} = q_2^{aa}$ ，以及 $q_1^{bb} = q_2^{bb}$ 。是故，為行文方便，我們省略控制變數的下標。同時， H_i 對 E_i 及 q_i^{aa} 與 q_i^{bb} 為嚴格凹入，而且限制式為線性的微分方程式，所以(13-1)-(13-7)式也是一組充分條件。

定理 1：就開路 Nash 賽局而言，唯一的穩態(Steady-State)均衡解存在。在該均衡解下，

(a) 廠商的合資研發支出為

$$E^0 = \frac{\mu[2\nu(2\alpha - C_a - C_b) - (\mu + \delta)\Omega]}{c\mu(\mu + \delta)\Omega - 8\nu^2}, \quad (14-1)$$

(b) 廠商的產出為

$$q^{ao} = \frac{\{c\mu(\mu + \delta)[\alpha\theta - C_a(2\beta + \gamma) - C_b(2A + R)] + 4\nu^2(C_a - C_b) - 2\theta\nu(\mu + \delta)\}}{\{c\mu(\mu + \delta)\Omega - 8\theta\nu^2\}}, \quad (14-2)$$

$$q^{bo} = \frac{\{C\mu(\mu+\delta)[\alpha\theta-C_b(2\beta+\gamma)-C_a(2A+R)] + 4\nu^2(C_a-C_b)-2\theta\nu(\mu+\delta)\}}{\{C\mu(\mu+\delta)\Omega-8\theta\nu^2\}}, \quad (14-3)$$

(c) 廠商的合資研發知識累積為

$$Z^0 = \frac{2[2\nu(2\alpha-C_a-C_b)-(\mu+\delta)\Omega]}{C\mu(\mu+\delta)\Omega-8\nu^2} \quad (14-4)$$

(d) 產出之市場價格為

$$P^{ao}=\alpha-(\beta+\gamma)q^{ao}+(A+R)q^{bo}, \quad (14-5)$$

$$P^{bo}=\alpha-(\beta+\gamma)q^{bo}+(A+R)q^{ao}. \quad (14-6)$$

證明：詳見附錄三。

為了凸顯網路外部性，產品相容性，研發學習效果，與研發合資調整成本對各別控制變數均衡解之影響效果，根據 (14-1)-(14-6) 式，我們可以獲得以下的比較靜態結果，並以命題 1 表示如下：

命題 1.

$$\frac{\partial E^0}{\partial A} > 0, \frac{\partial E^0}{\partial R} > 0, \frac{\partial E^0}{\partial \mu} < 0, \frac{\partial E^0}{\partial C} < 0, \frac{\partial E^0}{\partial \nu} > 0. \quad (15-1)$$

$$\frac{\partial Z^0}{\partial A} > 0, \frac{\partial Z^0}{\partial R} > 0, \frac{\partial Z^0}{\partial \mu} < 0, \frac{\partial Z^0}{\partial C} < 0, \frac{\partial Z^0}{\partial \nu} > 0. \quad (15-2)$$

$$\frac{\partial q^{ao}}{\partial A} > 0, \frac{\partial q^{ao}}{\partial R} > 0, \frac{\partial q^{ao}}{\partial \mu} < 0, \frac{\partial q^{ao}}{\partial C} < 0, \frac{\partial q^{ao}}{\partial \nu} > 0. \quad (15-3)$$

$$\frac{\partial P^{ao}}{\partial A} < 0, \frac{\partial P^{ao}}{\partial R} < 0, \frac{\partial P^{ao}}{\partial \mu} > 0, \frac{\partial P^{ao}}{\partial C} > 0, \frac{\partial P^{ao}}{\partial \nu} < 0. \quad (15-4)$$

命題 1 顯示，當廠商之間的產品具有網路外部性與相容性的特性時，其研發合資之支出水準，將會隨著產品網路外部性及其相容性效果之增加而增加。換言之，廠商以降低成本為研發目的的合資行為，會因為產品之間的網路效果及其相容性效果，而使得廠商更願意提高其研發合資的支出水準。這是因為研發的成效可以藉著產品的特性或者市場間的關聯而擴散到廠商之間的產品網路。這就科技事業製造業而言，例如：資訊，半導體，與精密機械產業，特別具有意義。其次，假如廠商的

研發合資知識累積的折舊率（亦即，累積知識被局部化的速度）愈高，則廠商之間的研發合資支出水準是會減少的。這隱含在面臨研發成果很容易被淘汰或被許代的情況下，廠商是不會提高其研發合資支出的。因此，依此而論，我們亦可推測某些產業是不太可能組成研發合資的策略聯盟，如果其研發合資的利益，只能有少部份被實現的話。而當廠商的研發合資調整成本增加時，廠商的研發合資支出也將隨之減少。同樣的經濟意義也適用於廠商的研發合資知識累積。再者，若廠商的研發合資知識累積的學習效果愈大，則其研發合資支出及知識累積也都將增加。

關於產品的網路外部性及其相容性效果對廠商之產出及其市場價格之作用，從命題 1 可知，這兩種效果對廠商的產出會有正面的影響。換言之，產品之間的正相互關聯性愈大，則廠商的產出也就愈多。反之，則愈少。同理，我們也可得知產品的網路外部性及其相容性效果，會使得產品的價格降低。而廠商研發合資的折舊率及其調整成本，則會對廠商之產出及其價格，造成不利的負面效果。而研發學習效果則會有正面的影響效果，其理至為明顯，在此不再贅述。總之，由命題 1 我們得到二個重要的事實：產品的網路外部性及其相容性，會影響廠商的研發合資支出水準。網路效果愈大（小）或產品相容性愈高（低），廠商的研發合資支出也就愈多（少）。其次，研發學習效果愈大（小），則廠商的研發合資支出也就愈多（少）。如果我們認為良好的研發合資環境及其法令制度與完善的研發人力獎勵制度，皆有助於提高研發學習效果的話，則本命題所顯示的經濟涵意，不言可喻。

以下，我們將對 (10)、(11)，和 (14) 式的結果，做個比較。主要的目的是在探討當 $c \rightarrow 0$ 和 $\nu \rightarrow 1$ 時，動態賽局的穩態開路均衡是否會趨近於靜態合作 Cournot 均衡。同時，藉著比較的結果，我們提出一個簡單的判準，以決定在何種條件下，應該是可以容許廠商的研發合資行為。這將使得公平交易法第十四條的例外許可條件更為明確。

命題 2.

(a) 當研發調整成本趨近於零而且研發知識累積的學習效果相當小的情況下，廠商在穩態開路均衡時的研發合資支出水準，並未與相對應的靜態合作 Cournot 均衡水準一致。但是，在穩態開路均衡時的廠商總產出與其價格之和，則與相對應的靜態合作 Cournot 均衡水準一致。亦即，

$$\begin{aligned} E_c^0 \rightarrow 0, v \rightarrow 1 &< E^c, (q^{ao} + q^{bo})_c \rightarrow 0, v \rightarrow 1 = q^{ac} + q^{bc}, \\ (P^{ao} + P^{bo})_c \rightarrow 0, v \rightarrow 1 &= P^{ac} + P^{bc}. \end{aligned} \quad (16)$$

(b) 當研發調整成本趨近於零而且研發知識累積的學習效果相當小的情況下，廠商在穩態開路均衡時的研發支出水準，廠商的總產出與其價格之和，並未與相對應的靜態競爭均衡水準一致。亦即，

$$\begin{aligned} E_c^0 \rightarrow 0, v \rightarrow 1 &< E^s, (q^{ao} + q^{bo})_{c \rightarrow 0, v \rightarrow 1} = \frac{1}{2}(q^{ac} + q^{bc}), \\ \frac{(P^{ao} + P^{bo})_{c \rightarrow 0, v \rightarrow 1}}{P^{as} + P^{bs}} &= \frac{4\alpha - (\mu + \delta)(\beta + \gamma - A - R)}{4\alpha - 2(\mu + \delta)(\beta + \gamma - A - R)} > 1. \end{aligned} \quad (17)$$

命題 2-(a) 顯示，在廠商的研發調整成本與其研發知識累積的學習效果皆相當微小時，動態的廠商研發合資支出水準與靜態合作 Cournot 的情況比較，是偏低的。這是因為，既然研發調整成本與其研發知識累積的學習效果皆相當不顯著，則廠商研發合資支出的多寡，就視研發知識累積的折舊率之大小而定。折舊率愈小，則廠商的合資研發支出也就愈低。至於廠商的總產出與其市場價格之和，則是與靜態合作 Cournot 的結果一致。命題 2-(a) 的結果說明，在動態賽局中，若不考慮研發調整成本與研發學習效果的因素後，穩態開路均衡並不一定會和對應的靜態合作 Cournot 均衡一致。而是否能獲得一致的結果，應視廠商的研發學習效果及所其面臨的不同市場結構（亦即，產品市場與研發市場）而定。這是一般文獻所未曾提及的。（例如 :Dockner(1992)，Driskill and McCafferty(1989)，Fershtman and Kamien(1987)，與 Reynolds(1987)）。

命題 2-(b) 說明，廠商利用策略聯盟所形成的研發合資活動，是可以減少廠商在各別從事研發時所產生研發支出。這是因為透過聯盟之間的協調，廠商能避免重複的研發活動。同時，也因為廠商之間的策略聯盟所產生的市場力量，其產量之和偏低，產品價格之和偏高。不過，仔細觀察命題 2-(b) 的第三式，廠商研發合資對消費者所接受的市場價格之和而言，在相當合理的假設下，並沒有因為廠商的策略聯盟而大幅提高。我們以命題 3 來說明這個重要結果。

命題 3. 若 $(u+\delta)(\beta+\gamma-A-R)$ 充分小，且 γ 充分大，則在穩態開路均衡時的產品市場價格之和，會充分地與靜態競爭之市場價格之和一致。亦即，

$$(P^{ao}+P^{bo})_{c \rightarrow 0, v \rightarrow 1} \approx P^{as}+P^{bs}.$$

命題 3 提供我們一個廠商聯合行爲是否能夠被許可的基本判準。因為在公平交易法第十四條中規定，以降低成本為目的的廠商聯合研發行爲，是被允許的。不過，該條規定並未明白指出在何種情況下，可容許廠商的研發合資行爲。本命題則說明只要：(1) 合資研發知識累積的折舊率相當地低（亦即， $\mu \approx 0$ ），(2) 廠商的策略盟聯是著眼於長期利益或發展（亦即， $\delta \approx 0$ ），(3) 產品的網路外部性與相容性之效果相當地高（亦即， $A+R>>0$ ），與 (4) 產品的市場規模相當大（亦即， $\alpha > 0$ ），則廠商的研發合資行爲對消費者在購買兩種產品時的價格之和，只會產生可以忽略的價格漲幅。換言之，若廠商的研發合資策略聯盟符合上述的 4 個條件，則該聯合行爲應該是被許可的。因此，本命題充分說明許多重要科技產業，按市場的需求結構及產品的特性而言，其研發合資行爲是不會產生反競爭的風險。

另外，值得一提的是，倘若我們只考慮當研發調整成本趨近於零，而保留研發合資的學習效果時，則 (17) 可改寫為

$$\frac{(P^{ao}+P^{bo})_{c \rightarrow 0}}{P^{as}+P^{bs}} = \frac{4\alpha - \nu(\mu+\delta)(\beta+\gamma-A-R)}{4\alpha - 2(\mu+\delta)(\beta+\gamma-A-R)} \quad (17-1)$$

觀察 (17-1) 式，我們可以發現，廠商研發合資的學習效果能加強命題 3 的結論。換言之，在有 研發學習效果之下，廠商研發合資的反競爭風險將會變得更為微小。當然，就理論上而言， 穩態開路均衡時的市場價格之和有可能出現低於靜態競爭之市場價格之和。不過，這種 高度的學習效果是否存在，是個實証問題。我們以命題 4 來說明以上的分析。

命題 4. 當研發調整成本趨近於零時，則

$$\frac{P^{ao}+P^{bo}}{P^{as}+P^{bs}} > 1, \text{ 若 } 1 < \nu < 2,$$

$$\frac{P^{ao}+P^{bo}}{P^{as}+P^{bs}} = 1, \text{ 若 } \nu = 2,$$

$$\frac{P^{a0} + P^{b0}}{P^{as} + P^{bs}} < 1, \text{ 若 } \nu < 2.$$

在本節中，我們假設廠商是採取開路策略，因此，廠商的研發合資知識累積並不會影響其研發合資行為。然而，這種行為顯然是相當的不合實際。以下，我們將討論廠商的閉路（完全次賽局）Nash 均衡，來說明廠商現有的研發合資知識累積如何影響其研發合資支出水準。

肆、閉路（完全次賽局）Nash 均衡解

在本文的設定下，閉路（完全次賽局）Nash 均衡必須滿足 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式：

$$\delta V_i = \max_{q_i^a, q_i^b, E_i} \{ P_i^{aa} q_i^a + P_i^{bb} q_i^b - g_i^{aa} - g_i^{bb} - E_i - \frac{cE_i^2}{2} + V_Z^i(E_i + E_j - \mu Z) \}, i, j = 1, 2, i \neq j,$$
(18)

式中， V_i 為廠商 i 的價值函數 (Value function)。同時，基於本文的模型是屬於線性兩次式的結構 (Linear-Quadratic Structure)，因此我們猜測價值函數具有下列型式：

$$V^i(Z) = \frac{1}{2} \epsilon Z^2 + \delta Z + t, i = 1, 2,$$
(19)

於是，我們獲得下列的定理。

定理 2. 若 $c > \frac{16(\beta - A)\nu^2}{\mu(\mu + \delta)\Omega^2}$ ，則就閉路（完全次賽局）Nash 賽局而言，唯一的均衡解存在。在該均衡解下，

(a) 廠商的合資研發支出為

$$E^f = \frac{2\epsilon Z + 2\sigma - 1}{c}$$

(b) 廠商的產出為

$$q^{af} = \frac{\alpha \theta - (2\beta + \gamma)C_a - (2A + R)C_b}{\Delta} + \frac{\nu Z}{\Omega}$$

$$q^{bf} = \frac{\alpha \theta - (2\beta + \gamma)C_b - (2A + R)C_a}{\Delta} + \frac{\nu Z}{\Omega}$$

(c) 廠商的產出價格為

$$P^{af} = \alpha - (\beta + \gamma)q^{af} + (A + R)q^{bf},$$

$$P^{bf} = \alpha - (\beta + \gamma)q^{bf} + (A + R)q^{af},$$

其中，

$$\epsilon = \frac{(\mu + \frac{\delta}{2})c\Omega^2 - \sqrt{(\mu + \frac{\delta}{2})^2 c^2 \Omega^4 - 16(\beta - A)c\Omega^2\nu^2}}{4\Omega^2},$$

$$\sigma = \frac{2\epsilon\Omega^2 - 2\nu c(2\alpha - C_a - C_b)(\beta - A)}{[4\epsilon - c(\mu + \delta)]\Omega^2}.$$

證明：詳見附錄四。

由於 ϵ 和 Ω 皆大於 0，定理 2 告訴我們，若廠商現有的研發合資知識累積增加，則其研發合資支出及產出皆會增加。而且隨著產品的網路外部性及其相容性效果之增加，廠商的合資研發支出及產出也都將增加。當然，產品之市場價格亦跟著產品之網路外部性及其相容性效果之增加而減少。再者，研發合資知識累積之折舊率，調整成本，與貼現率，對廠商的研發支出會產生負面的影響效果，但不會影響廠商的產出水準。另外，研發知識累積的學習效果，對廠商的研發合資支出水準，產出，及價格皆會產生正面的影響效果。亦即，

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial A} > 0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial R} > 0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial \mu} < 0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial c} < 0,$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \delta} < 0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial \nu} > 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial A} > 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial R} > 0,$$

其次，如同定理 2 的假設，我們亦可獲得

定理 3. 若 $c > \frac{16(\beta - A)\nu^2}{\mu(\mu + \delta)\Omega^2}$ ，則就閉路（完全次賽局）Nash 賽局而言，唯一

的穩定的穩態 (Stable Steady-State) 均衡解存在。在該穩態均衡解下，

(a) 廠商的研發合資支出為

$$E^{fs} = \frac{2\epsilon Z^{fs} + 2^{\sigma-1}}{c}.$$

(b) 廠商的產出為

$$q^{afs} = \frac{\alpha \theta - (2\beta + \gamma)C_a - (2A + R)C_b}{\Delta} + \frac{\nu Z^{fs}}{\Omega},$$

$$q^{bfs} = \frac{\alpha \theta - (2\beta + \gamma)C_b - (2A + R)C_a}{\Delta} + \frac{\nu Z^{fs}}{\Omega}.$$

(c) 廠商的產出價格為

$$P^{afs} = \alpha - (\beta + \gamma)q^{afs} + (A + R)q^{bfs},$$

$$P^{bfs} = \alpha - (\beta + \gamma)q^{bfs} + (A + R)q^{afs}.$$

(d) 延長的合資研發累積知識為

$$Z^{fs} = \frac{8\nu(\beta - A)(2\alpha - C_a - C_b) - 2\Omega^2(\mu + \delta)}{\mu(\mu + \delta)c\Omega^2 - 16(\beta - A)\nu^2}$$

證明：詳見附錄四。

利用定理 3(d)，經過簡單的運算後，我們可以獲得下列命題。

命題 5.

$$\frac{\partial Z^{fs}}{\partial A} > 0, \quad \frac{\partial Z^{fs}}{\partial R} > 0, \quad \frac{\partial Z^{fs}}{\partial c} < 0, \quad \frac{\partial Z^{fs}}{\partial \mu} < 0, \quad \frac{\partial Z^{fs}}{\partial \delta} < 0, \quad \frac{\partial Z^{fs}}{\partial \nu} > 0,$$

命題 5 說明，產品的網路外部性與其相容性效果，對廠商的研發合資知識累積會產生正面的作用。而研發合資知識累積的折舊率及其調整成本與貼現率，對廠商的研發知識累積，均有負面的影響效果。再者，研發合資知識累積的學習效果對對廠商的研發合資知識累積也會產生正面的作用。

利用命題 5 的結果，我們也可獲得有關定理 3(a)-3(c) 的比較靜態結果。由於該定性結果與經濟意義均與命題 1 相同。在此我們將不再討論。不過，將開路與閉路 Nash 穩態均衡相互比較，我們可以發現：

命題 6. 在既定的參數設定下，

$$Z^0 > Z^{fs} , E^0 > E^{fs} , q^{afs} + q^{bfs} < q^{ao} + q^{bo} ,$$

$$P^{afs} + P^{bfs} > P^{ao} + P^{bo} .$$

命題 6 顯示，倘若廠商能充分利用現有的研發知識累積之訊息，以修正其現有的研發合資支出水準，則在閉路 Nash 均衡解下的穩態控制變數及說明變數之數值，將會比在開路 Nash 均衡解下，相對應之變數值為小。這充分說明，在不同的訊息結構下，廠商所採取的生產及研發策略是有差別的。而更有趣的是，隨著產品之網路外部性及其相容性與研發學習效果之增加，兩者之間的數值差異會更大。但是，研發知識累積之折舊率及其調整成本與貼現率愈大，則兩者之間的數值差異會減少。以下，我們用簡單的數值模擬來表達這個事實。令基本的相關數值資料如下：

$$\alpha = 2000 , C_a = 500 , C_b = 520 , \beta = 100 , \gamma = 75 ,$$

$$A = 40 , R = 25 , \mu = 0.2 , \delta = 0.5 , c = 1 , \nu = 1.2 ,$$

為節省篇幅，我們將 $Z^0 - Z^{fs}$ 的數值模擬結果，以表一說明之。

表一： $Z^0 - Z^{fs}$ 之數值模擬

| \downarrow | A = 35 | R = 20 | $\mu = 0.15$ | $\delta = 0.45$ | c = 0.5 | $\nu = 1.1$ |
|----------------|--------|--------|--------------|-----------------|---------|-------------|
| $Z^0 - Z^{fs}$ | 439.33 | 516.47 | 1638.13 | 322.07 | 982.50 | 388.771 |
| 基本資料 | A = 40 | R = 25 | $\mu = 0.2$ | $\delta = 0.5$ | c = 1 | $\nu = 1.2$ |
| $Z^0 - Z^{fs}$ | 525.90 | 525.90 | 525.90 | 525.90 | 525.90 | 525.90 |
| \uparrow | A = 45 | R = 30 | $\mu = 0.25$ | $\delta = 0.55$ | c = 1.2 | $\nu = 1.3$ |
| $Z^0 - Z^{fs}$ | 640.74 | 534.32 | 281.95 | 250.44 | 349.84 | 745.26 |

根據表一的數值模擬結果與命題 6，本文的模型指出，在不同訊息結構下的廠商生產及研發策略之差異性，會隨著產品特性，成本條件，與研發學習效果之不同而不同。最後，我們亦可比較閉路 Nash 均衡解與靜態均衡解之差異。如同命題 3，比較的結果亦顯示， $P^{afs} + P^{bfs} \approx P^{as} + P^{bs}$ 。我們以表二來敘述這個經濟事實。

表二：比較 $P^{afs} + P^{bfs}$ 與 $P^{as} + P^{bs}$ 之數值模擬

| | | | | | | |
|--------------|----------|----------|--------------|-----------------|-----------|-------------|
| \uparrow | $A = 45$ | $R = 30$ | $\mu = 0.25$ | $\delta = 0.55$ | $c = 1.2$ | $\nu = 1.3$ |
| ΔP | 0.9965 | 0.9977 | 1.0119 | 1.0099 | 1.0044 | 0.9972 |
| 基本資料 | $A = 40$ | $R = 25$ | $\mu = 0.2$ | $\delta = 0.5$ | $c = 1$ | $\nu = 1.2$ |
| ΔP | 1.0022 | 1.0022 | 1.0022 | 1.0022 | 1.0022 | 1.0022 |
| \downarrow | $A = 35$ | $R = 20$ | $\mu = 0.15$ | $\delta = 0.45$ | $c = 0.8$ | $\nu = 1.1$ |
| ΔP | 1.0077 | 1.0065 | 0.9858 | 0.9944 | 0.9980 | 1.0059 |

註一： $\Delta P = \frac{P^{afs} + P^{bfs}}{P^{as} + P^{bs}}$

換言之，命題 3 與 4 的經濟意義及其所引申的廠商研發合資之聯合行為，在閉路 Nash 均衡策略下亦可成立。

伍、結論

在競合的時代裡，競爭廠商之間透過策略聯盟所形成的研發合資行為，已經是大勢所趨。這對重要高科技的產業而言，例如：通訊，資訊，消費性電子，半導體，與精密器械與自動化等產業而言，更是如此。本文利用微分賽局模型，分析廠商之間的研發合資支出是否會受到，產品之網路外部性及其相容性以及研發調整成本與研發知識累積之學習效果之影響。換言之，本文的主要貢獻，如果和 D'Aspremont 與 Jacquemin(1988) 的文獻相比較的話，是在於強調多產品市場間的關連性以及研發活動的動態特性。就研發的動態面而言，研發知識累積的學習效果與訊息回饋效果皆是靜態完全次賽所無法處理的。正如 D'Aspremont 與 Jacquemin 所說，他們的分析是相當的侷限，也忽略了不少研發活動的重要特性，而本文就是在這一方面做了一些理論上的擴展。但是，毫無疑問地，本文仍有些缺失待改進。特別是，我們並未考慮動態研發活動所產生的社會福利效果分析，以及政府對廠商研

發的獎勵措施在動態架構下的效果。在本文的研究架構下，我們發現，在開路與閉路 Nash 均衡策略下，產品市場之間的需求關聯性，亦即，產品之網路外部性與相容性效果以及研發知識累積之學習效果，皆會對廠商之研發合資支出產生正面的影響效果。而研發知識累積之折舊率及其整成本與貼現率，則會產生負面的影響效果。這都說明產品或市場之間的關聯性與廠商對研發知識的應用能力會影響廠商的合資意願。同時，我們亦發現(1)研發知識累積之折舊率愈小，(2)廠商之策略聯盟乃是著重於長期的利益或發展，(3)產品之網路外部性與相容性之效果，研發知識累積之學習效果，與產品的市場大小皆愈大，則廠商從事研發合資所產生的反競爭效果也就會愈小。因此，本文的結果亦提供公平交易法第十四條，有關高科技廠商在從事聯合行爲時，可容許的例外原則。本文建議，對國內某些重要科技產業的研發合資行爲應該給予支持。

至於未來的研究方向，則應該將國際之間的跨國研發合資行爲納入考慮，除了應該分析總體因素之外，也應該探討該跨國策略聯盟對國內社會福利之影響，以及由該聯合行爲所衍生的法律規範問題。

參考文獻

1. 李堯賢與莊慶達 "遲滯價格，調整成本，成本縮減不確定，與聯合研發冒險" 公平交易法與市場機能研討會論文集，82.10，45-67.
2. Besley , Timothy and Suzumura , Kotaro , "Taxation and Welfare in an Oligopoly with Strategic Commitment" International Economic Review , 1992 , 413-31.
3. Bulow , Jeremy I. , John Geanakoplos and Paul Klemperer , "Multimarket Oligopoly: Strategic Substitutes and Complements" J. of Political Economy , 1985 , 488-511.
4. Choi , Jay Pil , "Cooperative R&D with Product Market Competition" International J. of Industrial Organization , 1993 , 553-571.

5. D'Aspremont , C. and A. Jacquemin , "Cooperative and Noncooperative R&D in Duopoly with Spillovers" American Economic Review , 1988 , 1133-1137.
6. Dockner , Engelbert J. , "A Dynamic Theory of Conjectural Variations" J. of Industrial Economics , 1992 , 377-395.
7. Driskill , R. A. and McCafferty S. , "Dynamic Duopoly with Adjustment Costs: A Differential Game Approach" J of Economic Theory , 1989 , 324-338.
8. Economides , N. , "Desirability of Compatibility in the Absence of Network Externalities" American Economic Review , 1989 , 1165-1181.
9. Fershtman , C. and Kamien M. I. , "Dynamic Duopolistic Competition with Sticky Price" Econometrica , 1987 , 1151-1164.
10. Farrell , J. and Saloner G. , "Standardization , Compatibility , and Innovation" Rand J. of Economics , 1985 , 70-83.
11. Friedman , J. W. , Oligopoly and the Theory of Games , North-Holland , Amsterdam , 1977.
12. Kamien , M.I. , E. Muller and I. Zang , "Research Joint Ventures and R&D Cartels" American Economic Review , 1992 , 1293-1306.
13. Kamien , M.I. , Israel Zang , "Competing Research Joint Ventures" J. of Economics & Management Strategy , 1993 , 24-40.
14. Katz , M. and Shapiro C. , "Network Externalities , Competition , and Compatibility" American Economic Review , 1985 , 424-440.
15. Kesteloot , K. , "Multimarket Cooperation with Scope Effects in Demand" J. of Economics , 1992 , 245-264.
16. Matutes , C. and Regibeau P. , "Mix and Match: Product Compatibility Without Network Externalities" Rand J. of Economics , 1988 , 221-234.
17. Reynolds , S. S. , "Capacity Investment , Preemption and Commit-

- ment in an Infinite Horizon Model" International Economic Review , 1987 , 69-88.
18. Spence , A. Michael , "Cost Reduction , Competition , and Industry Performance" , Econometrica , 1984 , 101-121.
19. Suzumura , K. , "Cooperative and Noncooperative R&D in an Oligopoly with Spillovers" American Economic Review , 1992 , 1307-1320.
20. Tirole , Jean , The Theory of Industrial Organization , The MIT press , 1988.

附 錄

附錄一、請參考李堯賢與莊慶達(1993)附錄1之證明。

附錄二、對稱性之證明

首先，聯立解(13-1)與(13-2)可得

$$q_1^a + q_2^b = q_2^a + q_1^b = \frac{[2\alpha - (C_a + C_b) + 2Z] \Omega}{(2\beta - 2A)^2 - (\gamma - R)^2} \quad (A-1)$$

將(A-1)式代入(13-4)式，整理後，即得

$$\dot{\lambda}_i = (\mu + \delta) \lambda_i - \frac{[2\alpha - (C_a + C_b) + 2Z] \Omega}{(2\beta - 2A)^2 - (\gamma - R)^2} \quad (A-2)$$

解(A-2)式，並利用邊界條件，可知

$$\lambda_i(t) = \int_t^T e^{-(\mu + \delta)(T-t)} \left\{ \frac{[2\alpha - (C_a + C_b) + 2Z] \Omega}{(2\beta - 2A)^2 - (\gamma - R)^2} \right\} dT. \quad (A-3)$$

因此， $\lambda_1(t) = \lambda_2(t)$ 。從(13-1)，(13-2)，與(13-3)，加上 H_i 是 q_i^a ， q_i^b 與 E_i 的嚴格凸入函數，我們可以獲得 $q_1^a = q_2^a$ ， $q_1^b = q_2^b$ ，與 $E_1 = E_2$ 。

附錄三、定理1之證明

對(13-3)式就時間 t 微分，並利用(13-1)，(13-2)，與(13-4)式，可獲得

$$\begin{aligned} E &= \{(\mu + \delta) \Omega - 2\theta(2\alpha - C_a - C_b)\} \div c \Omega \\ &\quad + (\mu + \delta) E - \frac{4}{c \Omega} Z. \end{aligned} \quad (A-4)$$

因為對稱的關係，我們省略代表廠商的下標。亦即， $E=E_1=E_2$ 。由於在 Steady-state 時， $\dot{E}=\dot{Z}=0$ ，因此，我們得到

$$Z^0 = \frac{2[2(2\alpha - C_a - C_b) - (\mu + \delta) \Omega]}{c\mu(\mu + \delta) \Omega - 8} \quad (A-5)$$

$$E^0 = \frac{\mu[2(2\alpha - C_a - C_b) - (\mu + \delta) \Omega]}{c\mu(\mu + \delta) \Omega - 8} \quad (A-6)$$

而從 \dot{E} 與 \dot{Z} ，我們很容易知道滿足鞍點 (Saddlepoint) 的穩定條件必須為

$$c\mu(\mu + \delta) \Omega > 8\nu^2 \quad (A-7)$$

同時，該穩定條件亦隱含

$$\Delta \equiv (2\beta + \gamma)^2 - 2(A+R)^2 > 0,$$

$$\theta \equiv (2\beta + \gamma + 2A - R) > 0,$$

與

$$\Omega \equiv (2\beta + \gamma - 2A - R) > 0.$$

將 (A-5) 式代入 (13-1) 與 (13-2) 式，就可求得 (14-2) 與 (14-3) 式的結果。

而 (14-5) 與 (14-6) 式的結果也就跟著獲得了。

附錄四、定理 2 之證明

利用 (18) 與 (19) 式，我們可以獲得

$$2\Omega^2\epsilon^2 - (\mu + \frac{\delta}{2})c\Omega^2\epsilon + 2(\beta - A)c\nu^2 = 0, \quad (A-8)$$

$$2(2\alpha - C_a - C_b)(\beta - A)c\nu^2 - 2\Omega^2\epsilon + \Omega^2[4\epsilon - c(\mu + \delta)]\sigma = 0, \quad (A-9)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha(2\alpha - C_a - C_b)}{\Omega} \\ &- \frac{(\beta + \gamma)(W_1^2 + W_2^2) - 2(A+R)W_1W_2}{\Delta^2} \\ &- \frac{C_aW_1 + C_bW_2}{\Delta} \\ &+ \frac{2(\sigma-1)(2\sigma+1-c)}{2c} - \delta_\tau = 0 \end{aligned} \quad (A-10)$$

其中，

$$W_1 = \alpha\theta - (2\beta + \gamma)C_a - (2A+R)C_b,$$

$$W_2 = \alpha\theta - (2\beta + \gamma)C_b - (2A+R)C_a.$$

由(A-8)式可知

$$\epsilon = \frac{(\mu + \frac{\delta}{2})c\Omega^2 \pm \sqrt{(\mu + \frac{\delta}{2})^2 C^2 \Omega^4 - 16(\beta - A)c\nu^2 \Omega^2}}{4\Omega^2}. \quad (A-11)$$

再將 ϵ 代入(A-9)，可得 σ 值。

而從(18)式的右邊可知

$$-1 - cE_1 + 2V_z^i(Z) = 0, \quad (A-12)$$

由於對稱的關係，

$$E_1 = E_2 = E^f = \frac{2\epsilon Z + 2\delta - 1}{c}. \quad (A-13)$$

同理，我們從(18)式的右邊亦可獲得定理2-(b)之結果。其次，將(A-13)式代入 Z ，則穩定條件要求

$$c\mu > 4\epsilon. \quad (A-14)$$

為滿足穩定條件，(A-11)式中的 ϵ 值必須是取負號。因此，(A-14)式的條件隱含 $\mu(\mu + \delta)c\Omega^2 > 16(\beta - A)\nu^2$ 。其次，在Steady-state時， $\dot{Z} = 0$ ，經過簡單運算後，可得

$$Z^{fs} = \frac{8\nu(\beta - A)(2\alpha - C_a - C_b) - 2(\mu + \delta)\Omega^2}{\mu(\mu + \delta)c\Omega^2 - 16(\beta - A)\nu^2}. \quad (A-15)$$

利用(A-15)式，我們就可獲得定理3的結果。